第 8 回和田杯

第 76 回文化祭

灘校数学研究部

入試模試の数学版として発足したこの企画も 8 回目となり，恒例企画となりつつあります．制限時間は文化祭が終わるまでの 2 日間，じっくり考え抜いていただけると幸いです．問題に関する質問はお気軽に受付までどうぞ．答案を書いてくださった方は，受付までお持ちいただくか，裏面記載の Twitter アカウントに答案の写真を送っていただければ正誤判定いたします．
注意：問題の並び順は難易度とは無関係です！

1. $AB = AC$ なる四角形 $ABCD$ が円 Ω に内接している．A を中心とし D を通る円を ω とし，直線 BC に関して D と対称な点を D' とする．このとき，B, D' を通り ω が内接する円と，C, D' を通り ω と互いに外接する円は，Ω 上で交わることを示せ．

2. $AB \neq AC$ なる三角形 ABC があり，その内心を I とする．I を通り直線 AI に垂直な直線と直線 AB, AC の交点を D, E とし，D, E から直線 BI, CI に下ろした垂線の足をそれぞれ F, G とする．三角形 FGI の外接円と直線 DE の I 以外の交点を X としたとき，直線 AX と三角形 ABC の外接円の A 以外の交点は, 三角形 FGI の外接円上にあることを示せ．

3. 不等辺三角形なる鋭角三角形 ABC があり，その内心，垂心をそれぞれ I, H とし，三角形 BCH の外接円の劣弧 BC の中点を M とする．また，直線 AI と直線 BH, CH の交点をそれぞれ P, Q とし，I から辺 BC に下ろした垂線と直線 BM, CM の交点をそれぞれ X, Y とする．直線 XQ と直線 YP の交点を D，直線 XQ と直線 AB の交点を E，直線 YP と直線 AC の交点を F とすると，三角形 DEF の外接円と三角形 BCH の外接円は接することを示せ．

4. 不等辺三角形なる鋭角三角形 ABC があり，その外心，垂心をそれぞれ O, H とする．また，A から辺 BC におろした垂線の足を D とし，辺 BC の中点を M とする． M から辺 AB, AC におろした垂線と直線 OH の交点をそれぞれ P, Q とし，直線 DP と MQ の交点を X，直線 DQ と MP の交点を Y とすると，直線 AO と XY は平行であることを示せ．

5. 実数に対して定義され実数値をとる関数 f であって，任意の実数 x, y に対して

$$f(xf(x+y)) + f(x+y) = (x+1)f(x) + f(yf(x))$$

が成り立つようなものをすべて求めよ．

6. 正の実数に対して定義され正の実数値をとる関数 f であって，任意の正の実数 x, y に対して

$$f(x+y) + xf(y) = f(xy + f(y)) + x$$

が成り立つようなものをすべて求めよ．

7. p を素数，n を p 以下の正整数とする．任意の整数 k に対し，${}_{a_k}\mathrm{P}_{np-2} - kp^{n-1}$ が p^n の倍数となるような $np-2$ 以上の整数 a_k が存在するような (n, p) の組をすべて求めよ．ただし正の整数 n に対し ${}_n\mathrm{P}_0 = 1$ とする．

8. 正整数の組 (a, b, c, d) であって，等式

$$(2^a + b + 3(ac + 2c - 1)^2)(4d^2 - 81(7 \cdot 3^a - 1)^2 + 16) = 16(b + d^2 + d)$$

をみたすものをすべて求めよ．

9. 正の実数 ε であって，$n < \varepsilon m^2$ をみたす任意の正整数の組 (m, n) に対し，以下のように定める N について，N の最大の素因数が $\sqrt{N}$ 以下であるようなものが存在することを示せ．

- $(2m+1) \times (2m+1)$ のマス目があり，最初，上から $m+1$ 行目の左から $m+1$ 番目のマスに蜜蜂君が立っている．蜜蜂君は，1 回の行動で，上下左右の隣接するマスのいずれかに動く．蜜蜂君が $2n$ 回行動する時，すべての行動の終了後に最初にいたマスにいるような方法の総数を N 通りとする．ただし，途中で最初にいたマスに戻ってくるような方法も含める．

10. $\angle A = 90^\circ$ なる直角三角形 ABC において，辺 BC の中点を点 M とする．直線 AM 上に $AM \neq DM$ なる M と異なる点 D をとり，四角形 $ABDC$ の Miquel 点を P とすると，直線 AP と直線 BC が直交することを示せ．ただし，台形でない四角形 $WXYZ$ において，直線 WX と直線 YZ，直線 XY と直線 ZW の交点を点 U, V として，4 つの三角形 UWZ, UXY, VWX, VYZ のそれぞれの外接円は 1 点で交わり，この点を四角形 $WXYZ$ の Miquel 点とする．

11. 非負整数に対して定義され正整数値をとる関数 f であって，任意の非負整数 m, n に対して

$$\frac{f(n)f(f(n)+m)+m}{f(m)+n}$$

が整数となるものをすべて求めよ．

12. 色，形，塗り方，数がそれぞれ数字 $1, 2, 3, 4$ のうち 1 つで表すことのできる図形と 256 枚のカードがある．それぞれのカードには図形が 1 つ書かれておりどの 2 枚のカードを選んでも書かれている図形は異なる．ここで，以下の条件をみたす 4 枚のカードを「SET」と定義する．

- 色，形，塗り方，数それぞれについて，4 枚のカードの数字がすべて異なるか，すべて同じ

最初，256 枚のカードすべてが床に置かれており，机の上にはなにもない．次に n 枚のカードを床から選択し，机の上に置く．この後，あなたは以下の操作を好きな回数行うことができる．

- 机の上にある 3 枚のカードを選択する．床にあるカードで選択した 3 枚のカードと合わせた 4 枚のカードが SET であるようなカードがあれば、そのカードを机に置く．

すべてのカードを机に置くことができる n の最小値を求めよ．

作問者 (協力ありがとう！)

1. 戸川 2. 戸川 3. 戸川 4. 戸川 5. 戸川 6. 戸川 7. 沖 8. 沖 9. 沖 10. 沖 11. 沖 12. 蜂矢

生徒時代に数研に在籍していらっしゃった和田孫博前校長先生のお名前を冠して始まった本企画も，今年で 8 回目を迎えることとなりました．当初は「入試模試の数学版」と銘打っておりましたが，今となっては入試模試と張り合える有名企画になりつつあるかなと思います．
さて昨年この企画を担当された小林先輩が卒業され，わたくし増田が引き継ぐこととなりました．部員の協力もあり，今年もなんとか和田杯を開催できたことをうれしく思います．しかし，例年のことですが，今年は特に問題作成者が高校 3 年生のみであることもあり，来年以降の開催が危惧される状況です．後輩の活躍を切に願うばかりです．
答案の正誤判定については 1 ページ目にお書きした通りですが，今回の和田杯もオンラインでの参加を受け付けております．特に Twitter 上では例年たくさんの方々に解いていただいており，こちらも非常にありがたい限りです．文化祭に来場できないという皆様も是非ご参加ください．一人でも多くの皆様のご参加を心待ちにしています．
それでは！ Good Luck！

- 答案郵送先 (返信用の切手を同封してください)：
  〒658-0082 神戸市東灘区魚崎北町 8-5-1 灘校数学研究部
- 数研メールアドレス：nada.math.club@gmail.com
- Twitter アカウント：@nada_mathclub
- 数研 HP：https://nada-mathclub.jimdofree.com

文責 高校 3 年 増田拓真